הכנה למבחן — משוואות דיפרנציאליות

11 ביולי 2026

תוכן עניינים

1 מפתחות למשפטים חשובים 3
1.1 קיום ויחידות 3
1.1.1 כל מערכת משוואות מסדר n שקולה למערכת משוואות מסדר ראשון 3
1.1.2 משפט הקיום של פיאנו 3
1.1.3 משפט פיקארד 3
1.2 תלות בתנאי התחלה 4
1.2.1 טריכוטומיות 4
1.2.2 תלות רציפה בתנאי ההתחלה 5
1.2.3 תלות גזירה בתנאי התחלה 6
1.3 משוואות לינאריות עם מקדמים קבועים 7
1.3.1 טענות על אקספוננט 7
1.4 משוואות לינאריות לא הומגניות 9
1.5 התנהגות לוקלית, התנהגות גלובלית ויציבות 10
1.5.1 הקריטריון הלינארי ליציבות אסימפטוטית 10
1.5.2 משפט ליאפונוב 10
1.6 משוואות דיפרנציאליות חלקיות 12
1.6.1 פונקציות הרמוניות 12
1.6.2 פונקציות תת־הרמוניות 13
1.6.3 הרמות הרמוניות 14
2 דברים חשובים מתרגילים 15
2.1 תרגיל 1 15
2.1.1 שיטת גורם האינטגרציה 15
2.2 תרגיל 2 15
2.2.1 הלמה של גרונוול 15
2.3 תרגיל 3 15
2.3.1 משפט פיקארד עבור משוואות לינאריות עם מקדמים קבועים 15
3 דברים טכניים 16
3.1 שימוש בשיטת גורם האינטגרציה 16
3.2 שיטת הפרדת משתנים 17
3.3 שימוש בוריאציה של קבועים 18
3.4 איטרציות פיקארד 19
3.5 דיאגרמות זרימה 20

1 מפתחות למשפטים חשובים

1.1 קיום ויחידות

כל מערכת משוואות מסדר n שקולה למערכת משוואות מסדר ראשון

משפט 1.1

נניח שנתונה מערכת m משוואות דיפרנציאליות מסדר n כאשר $x^{(n)}(t) = F\big(x(t), x'(t), ..., x^{(n-1)}(t), t\big)$ עבור $F : U \to \mathbb{R}^m$ כאשר $U \subseteq R^{nm+1}$.
אז יש מערכת מסדר 1, $y'(t) = G(y(t), t)$ עבור $G : V \subseteq \mathbb{R}^{nm+1} \to \mathbb{R}^{nm}$ כך שהמערכות שקולות במובן הבא

1. אם $x(t)$ פתרון למערכת המקורית אז $y = \big(x, x', ..., x^{(n-1)}\big)$ הוא פתרון למערכת החדשה
2. אם y פתרון למערכת החדשה אזי $x = y_0$ הוא פתרון למערכת המקורית ולכל $0 \le i \le n-2$ מתקיים $y_i' = y_{i+1}$

מפתח להוכחה: לטענת יונתן, קל לראות שהנדרש מתקיים כשמגדירים את המערכת $y'(t) = G(y(t), t)$ על־ידי

$$\begin{cases} y_0'(t) = y_1(t) \\ y_1'(t) = y_2(t) \\ \vdots \\ y_{n-1}'(t) = F(y_0(t), ..., y_{n-1}(t), t) \end{cases}$$

משפט הקיום של פיאנו

משפט 1.2 משפט הקיום של פיאנו

תהיי $U \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה, $F : U \to \mathbb{R}^n$ רציפה ו־$\widetilde{x_0} \in U$ נקודת התחלה.
אז יש $\delta > 0$ ופונקציה גזירה $x : (-\delta, \delta) \to U$ שפותרת את בעיית ההתחלה

$$\begin{cases} x(0) = \widetilde{x_0} \\ x'(t) = F(x(t)) \end{cases}$$

מפתח להוכחה: מספיק לזכור את הבנייה של x_k ו־y_k תחת הרצון להגיע לרציפות במידה שווה כדי להוכיח את הגבול

$$x(t) = \lim_{k\to\infty} x_k(t) = \widetilde{x_0} + \int_0^t F(x(s))\,\mathrm{d}s$$

משפט פיקארד

משפט 1.3 משפט פיקארד

תהיי $U \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה, $\widetilde{x_0} \in U$ ותהיי $F : U \to \mathbb{R}^n$ שהיא ליפשיצית מקומית כלומר לכל $K \subseteq U$ קומפקטית יש קבוע L_K כך ש־$F|_K$ ליפשיצית עם הקבוע L_K.
אזי יש $\delta > 0$ כך שקיים פתרון יחיד בקטע $[-\delta, \delta]$ לבעיה

$$\begin{cases} x(0) = \widetilde{x_0} \\ x'(t) = F(x(t)) \end{cases}$$

מפתח להוכחה של יונתן מההרצאה: מספיק לזכור את הטריק של $\tau = \inf\{t \in I \cap J \cap (0, \infty) \mid x(t) \neq y(t)\}$ ומרציפות לחסום את $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|x(t) - y(t)\|^2$ כדי להגדיר $f(t) = e^{-2Lt}\|x(t) - y(t)\|^2$ ולהגיע לסתירה באמצעות גזירה (אין צורך להוכיח את כל תהליך הגזירה, מספיק להגיד $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(t) \le -2Lf(t) + 2Lf(t) = 0$).

מפתח להוכחה של משפט פיקארד בווריאציה של משפט העתקה מכווצת:

1. מגדירים מהמשפט היסודי

$$x(t) = x_0 + \int_0^t F(x(s))\,\mathrm{d}s, \quad Kx(t) = x_0 + \int_0^t F(x(s))\,\mathrm{d}s$$

2. מסתכלים על כדור שחסום על־ידי C_r וזה מרחב מטרי שלם מהקטע $(-\delta, \delta)$ אז בוחרים $\delta \le \min\left(\frac{r}{2M_r}, \frac{1}{2C_r}\right)$ ומראים שחסום $\|Kx(t) - x_0\|, \|Kx(t) - Ky(t)\|$
3. משפט העתקה מכווצת מסיים

1.2 תלות בתנאי התחלה

טריכוטומיות

משפט 1.4 **טריכוטומיה של זרימות של שדה ליפשיץ מקומי**

תהיי $U \in \mathbb{R}^n$ פתוחה, תהיי $p \in U$ ו־$F : U \to \mathbb{R}^n$ ליפשיץ מקומית.
נסמן $X : J_p^* \to U$ הפיתרון המקסימלי לבעיית ההתחלה

$$\begin{cases} x'(t) = F(x(t)) \\ x(0) = p \end{cases}$$

אזי עבור $T \in \partial J_p^* \setminus \{\pm\infty\}$ מתקיים אחד משני המקרים הבאים

1. $\liminf\limits_{t \to T} \operatorname{dist}(x(t), \partial U) = 0$
2. $\limsup\limits_{t \to T} \|x(t)\| = \infty$

מפתח להוכחה: מניחים שלא ככה, ולכן יש $\varepsilon_0 > 0$ כך שעבור $A_{\varepsilon_0} = \{x \mid \operatorname{dist}(x, \partial U) > \frac{\varepsilon_0}{2}\}$ ולכן יש לנו קבוצה שחוסמת, אפשר לקחת סדרת זמנים ששואפת ל־T ועם כל x_{t_k} אפשר להפעיל את ההוכחה של משפט פיקארד ולקבל $\delta > 0$ אחידה לכולם אבל אז משפט פיקארד אומר שעבור $T < t_K + \delta$ הפיתרון מוגדר, בסתירה לסופרמיות של T.

טענה 1.5

תהיי $U \in \mathbb{R}^n$ פתוחה, תהיי $p \in U$ ו־$F : U \to \mathbb{R}^n$ ליפשיץ מקומית.
נניח שאנחנו יודעים שקיימת קבוצה קומפקטית $K \subseteq U$ ו־$T > 0$ ($T < 0$ עובד באופן דומה) כך שלכל $0 < t < T$ מתקיים שאם $t \in J_p^*$ אז $x_p(t) \in K$ אז מתקיים $[0, T) \subseteq J_p^*$.
כלומר, אם הפיתרון בתנאי התחלה p קיים עד לזמן t שבפיתרון המקסימלי אז $x_p(t) \in K$ אז אם כל זה קורה, $[0, T) \subseteq J_p^*$.

מפתח להוכחה: מניחים בשלילה ולכן הפיתרון מת בזמן מוקדם $\tau < T$ אבל מהנתון הוא נמצא בקבוצה הקומפקטית K אבל אז הפיתרון לא יכול לצאת מ־K כלומר לא יכול לגעת בשפה ולא יכול להתפוצץ כי K סגורה וחסומה.

משפט 1.6 תלות רציפה בתנאי ההתחלה

הקבוצה Ω היא קבוצה פתוחה וההעתקה $\Phi : \Omega \to U$ היא רציפה (F כמובן ליפשיץ מקומית).

מפתח להוכחה: תהיי $(p, t_0) \in \Omega$, נרצה להראות ש־Ω מכילה סביבה של (p, t_0) וש־Φ רציפה שם.
ניקח $t_0 \geq 0$ (לשלילי אותו הדבר אבל אנחנו אנשים חיוביים) ותהיי

$$C := \{\Phi(p, t) \mid 0 \leq t \leq t_0\} \subseteq U$$

זאת קבוצה סגורה וחסומה ולכן קומפקטית ויש לה מרחק חיובי מהשפה (כלומר, קיים $r > 0$ כך ש־$0 < 4r < \operatorname{dist}(C, \partial U)$). נסמן

$$M := \sup\{\|F(x)\| \mid \operatorname{dist}(x, C) \leq 4r\}$$
$$L := \operatorname{Lip} F|_{\operatorname{dist}(x,C) \leq 4r}$$

בשביל ההוכחה הזאת אנחנו צריכים 3 למות.

למה 1.7

תהיי $q \in U$ כך ש־$\|q - p\| \leq re^{-Lt_0}$ אזי לכל $0 \leq t \leq t_0$ כך ש־$(q, t) \in \Omega$ מתקיים

$$\|\Phi(p, t) - \Phi(q, t)\| \leq 2e^{Lt}\|p - q\| \leq 2r$$

מפתח להוכחה של למה 1.7: נניח בשלילה שלא ככה עבור $0 \leq t \leq t_0$ וניקח את τ כאינפימום של הזמנים המקיימים את הנחת השלילה. מהרציפות כמובן $(q, \tau) \in \Omega$ וכן $\|x_p(\tau) - x_q(\tau)\| = 2e^{L\tau}\|p - q\|$, וברור שלכל $t \in [0, \tau]$ מתקיים $\|x_p(t) - x_q(t)\| \leq 2e^{Lt}\|p - q\|$.
בפרט, מהפעלת הליפשיציות של F נקבל שלכל $t \in [0, \tau]$ מתקיים $\|F(x_p(t)) - F(x_q(t))\| \leq L\|x_p(t) - x_q(t)\|$.
מהטריק הקבוע של גזירת הנורמה בריבוע מניב שהפונקציה $f(t) = e^{-2Lt}\|x_p(t) - x_q(t)\|^2$ מונוטונית יורדת בקטע $[0, \tau]$. הצבת הקצוות 0 ו־τ נותנת סתירה ישירה.

למה 1.8

תהיי q כזו ש־$\|p - q\| \leq re^{-Lt_0}$, אם $(q, t) \in \Omega$ ו־$0 \leq t \leq t_0 + \frac{r}{M}$ אזי $\Phi(q, t) \in \tilde{C}$.

מפתח להוכחה של למה 1.8: נניח בשלילה שהמסלול בורח רחוק מדי (מרחק גדול מ־$4r$) בתוך תוספת הזמן. לפי למה 1, עד זמן t_0 הפתרון נמצא קרוב (מרחק שקטן מ־$2r$), ולכן הבריחה חייבת לקרות אחרי t_0. נגדיר את τ כרגע הבריחה המדויק הראשון (שבו המרחק שווה ל־$4r$). עד לרגע זה אנו נשארים באזור שבו המהירות חסומה על ידי M ואז חוסמים את החישוב

$$\operatorname{dist}(\Phi(q, \tau), C) \leq \|\Phi(q, \tau) - \Phi(q, t_0)\| + \operatorname{dist}(\Phi(q, t_0), C)$$

למה 1.9

נניח ש־$\|p - q\| \leq re^{-Lt_0}$ ו־$0 \leq t \leq t_0 + \frac{r}{M}$ אזי $(q, t) \in \Omega$ ומתקיים

$$\|\Phi(q, t_0) - \Phi(q, t)\| \leq 2e^{Lt_0}\|p - q\| + M\|t_0 - t\|$$

הערה

הלמה הזאת מסיימת את ההוכחה של משפט 1.6 עבור $t_0 \geq 0$.
ראשית ברור מכאן ש־Ω פתוחה וכן ש־Φ רציפה עבור $t_0 > 0$ ובמקרה $t_0 = 0$ מקבלים סביבה ימנית ב־t והרציפות היא רציפות מימין ב־t ומהוכחה דומה עבור $t_0 \leq 0$ נקבל רציפות משמאל וזה מסיים את ההוכחה.

מפתח להוכחה של למה 1.9: $(q, t) \in \Omega$: מלמה 2 הפתרון חסום בקבוצה הקומפקטית $\tilde{C}$, ולכן ממשפט הטריכוטומיה של פתרונות מקסימליים הוא אינו יכול לפקוע לפני הזמן $t_0 + \frac{r}{M}$ (כי אינו מתפוצץ ואינו פוגע בשפה).
האי־שיוויון: נפרק את המרחק בעזרת אי־שוויון המשולש דרך תחנת הביניים $\Phi(q, t_0)$. החלק הראשון ($\|\Phi(p, t_0) - \Phi(q, t_0)\|$) חסום על ידי למה 1 (התרחקות הפתרונות לאותו פרק זמן t_0). החלק השני ($\|\Phi(q, t_0) - \Phi(q, t)\|$) מייצג את המרחק שהפתרון של q עובר בזמן $|t - t_0|$. מכיוון שהפתרון נשאר ב־$\tilde{C}$, המהירות שלו חסומה ב־M, ולכן המרחק חסום על ידי המהירות M כפול הפרש הזמנים.

תלות גזירה בתנאי התחלה

משפט 1.10

יהי $I \subseteq \mathbb{R}$ קטע פתוח המכיל את 0, ותהיי $A : I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ פונקציה רציפה. אזי לבעיית ההתחלה

$$\begin{cases} M'(t) = A(t)M(t) \\ M(0) = \mathrm{Id} \end{cases}$$

קיים פתרון יחיד $M(t)$ המוגדר על כל הקטע I.

מפתח להוכחה:

1. קיום מקומי: המשוואה לינארית ב־M, ולכן ליפשיצית מקומית. משפט פיקארד מבטיח קיום פתרון מקומי סביב כל נקודה.
2. פירוק לעמודות: כדי להקל על העבודה עם נורמות, מפרקים את המשוואה המטריציונית ל־n משוואות וקטוריות נפרדות עבור כל עמודה v_j.
3. מניעת פיצוץ (גרונוול): עושים אינטגרציה על שני האגפים ומוציאים נורמה. מקבלים אי־שוויון אינטגרלי שבו הנורמה של הפתרון חסומה על ידי האינטגרל של עצמה. הלמה של גרונוול מבטיחה שהנורמה גדלה לכל היותר בקצב מעריכי (חסם e^{Lt}), ולכן לעולם אינה מתפוצצת לאינסוף בזמן סופי.
4. קיום גלובלי: לפי משפט הטריכוטומיה, פתרון שאינו מתפוצץ לאינסוף ואינו פוגע בשפה (שהיא כל המרחב), חייב להמשיך להתקיים ולהיות מוגדר על כל הקטע I.

משפט 1.11 תלות גזירה בתנאי ההתחלה

תהיי $U \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה ו־$p \in U$ עם $F : U \to \mathbb{R}^n$ גזירה ברציפות ובפרט ליפשיץ מקומית.
יהי x_p הפיתרון המקסימלי לבעיית ההתחלה

$$\begin{cases} x'(t) = F(x(t)) \\ x(0) = p \end{cases}$$

ויהי $M(t)$ הפיתרון המקסימלי לבעיית ההתחלה

$$\begin{cases} M'(t) = DF(x(t))M(t) \\ M(0) = \mathrm{Id} \end{cases}$$

אזי לכל $T \in J_p^*$, φ_T גזירה ב־p והדיפרנציאל שלה נתון על־ידי $D\varphi_T(p) = M(t)$.

מפתח להוכחה: יש הרבה שלבים טכניים אז נדבר יותר על הרעיון של ההוכחה.
נגדיר

$$u(t) = x_q(t) - x_p(t) - M(t)(q-p)$$

1. פירוק הנגזרת: גוזרים את $u(t)$ ומקבלים ביטוי שאפשר לסדר מחדש כשני חלקים: חלק לינארי ($DF \cdot u$) ועוד שארית טיילור של הפונקציה F (שהיא זניחה).
2. שליטה בשארית: בזכות "תלות רציפה בתנאי התחלה" (המשפט הקודם), המסלולים נשארים קרובים מאוד זה לזה. לכן אפשר להבטיח ששארית טיילור נשארת קטנה כרצוננו (η כאשר קיימת $\eta > 0$ כך שמתקיים $\eta K T e^{T(L+\eta)} < \varepsilon$).
3. הלמה של גרונוול: עושים אינטגרציה על משוואת הנגזרת שקיבלנו. מפעילים את הלמה של גרונוול על הנורמה של השגיאה, והיא מבטיחה לנו שהשגיאה הכוללת נשלטת על ידי השארית הזניחה, ולכן הקירוב הלינארי באמת מתאר את המערכת היטב.

1.3 משוואות ליניאריות עם מקדמים קבועים

משפט 1.12 **קיום פיתרון כל עוד המשוואה מוגדרת**

יהי $I \subseteq \mathbb{R}$ קטע שמכיל את 0, $A : I \to \mathbb{R}^{n\times n}, g : I \to \mathbb{R}^n$ פונקציות רציפות. אזי לכל $x_0 \in \mathbb{R}^n$ קיים פתרון יחיד אשר מוגדר על כל I לבעיית ההתחלה

$$(\star) \begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) + g(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

מפתח להוכחה:

1. קיום מקומי: מצמצמים לקטע קומפקטי I_0 שעליו הפונקציות $A(t), g(t)$ חסומות (על ידי L ו־M). הפונקציה ליפשיצית ב־x, ולכן לפי משפט פיקארד מובטח פתרון מקומי.
2. חסימת קצב הגידול: גוזרים את הנורמה בריבוע ($\|x(t)\|^2$) ונעזרים בקושי־שוורץ ומשולש כדי לחסום את הנגזרת מלמעלה על ידי פולינום: $2L\|x(t)\|^2 + 2M\|x(t)\|$.
3. בליעת האיבר הליניארי: כדי להיפטר מהאיבר הלינארי, "בולעים" אותו אל תוך האיבר הריבועי (מגדילים ל־$4L$) בתוספת קבוע C. מתקבל אי־השיוויון $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|x(t)\|^2 \le 4L\|x(t)\|^2 + C$.
4. גורם אינטגרציה: כופלים באקספוננט e^{-4Lt} כדי לכנס את האגפים לנגזרת אחת, ועושים אינטגרציה. מוכיחים שהפתרון חסום מעריכית ולכן אינו מתפוצץ לאינסוף.
5. קיום גלובלי (טריכוטומיה): הפתרון אינו פוגע בשפה (המרחב הוא כל $\mathbb{R}^n$) ואינו מתפוצץ בזמן סופי, ולכן ממשפט הטריכוטומיה חייב להיות מוגדר על כל הקטע I_0.

משפט 1.13

מרחב הפתרונות המקסימלי למשוואה $(\star)$ עם $g(t) = 0$ לכל t (ללא תנאי התחלה) הוא מרחב לינארי ממימד n.

מפתח להוכחה: נסמן ב־e_k את הוקטור הסטנדרטי ונסמן ב־x_k את הפתרון ל־$(\star)$ עם תנאי ההתחלה $x_k(0) = \mathrm{e}_k$.
מראים אי־תלות ופורשת ישירות מהגדרה תחת ההנחה שלכל t, $\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j(t) = 0$ ולכן זה בפרט נכון ל־0 ואת הפורשת מראים עם משפט פיקארד.

טענות על אקספוננט

טענה 1.14

הטור $\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ כאשר $A^0 = \mathrm{Id}$ מתכנס.

טענה 1.15

אם $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ כך ש־$AB = BA$ אזי $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$.

מסקנה 1.16

אם $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ אז $\exp(A)$ מטריצה הפיכה ו־$(\exp(A))^{-1} = \exp(-A)$.

מסקנה 1.17

לכל $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ההעתקה $t \mapsto \exp(tA)$ (זו ההעתקה $\mathbb{R} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$) היא הומומורפיזם של חבורות.

טענה 1.18

יהי y הפתרון המקסימלי למשוואה

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

ו־$x(t) = \exp(tA)x_0$. אז $y(t) = \exp(tA)x_0$ לכל $t \in I$.

מפתח להוכחה: כרגיל מניחים שלא ומסמנים $\tau := \inf\{t > 0 \mid x(t) \neq y(t)\}$ ומרציפות כרגיל $y(\tau) = x(\tau)$.
נסמן $z_* = \exp(\tau A)x_0$ ונתבונן בבעיה

$$(\star\star) \begin{cases} z'(t) = Az(t) \\ z(\tau) = z_* \end{cases}$$

מאיטרציות פיקארד ידוע שיש סביבה $0 < \delta$ של τ כך ש־$z(t) = \exp((t-\tau)A)z_*$ הוא הפיתרון היחיד לבעיה $(\star\star)$ וגם y, z מתלכדים ומחשבים את $z(t)$ בסביבה עם תכונות האקספוננט ומגיעים לסתירה.

טענה 1.19

לכל בלוק ז'ורדן $J_\lambda \in \mathbb{C}^{n\times n}$ מתקיים

$$\exp(tJ_\lambda) = e^{t\lambda}\begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \dots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ & 1 & t & \dots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & t \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

מפתח להוכחה: באינדוקציה עם נוסחת הבינום.

1.4 משוואות לינאריות לא הומגניות

משפט 1.20

יהיו $A : I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ רציפה ו־$g : I \to \mathbb{R}^n$ רציפה כאשר $I \subseteq \mathbb{R}$ קטע ונסמן ב־$\pi(t)$ את מטריצת הפתרונות היסודית למשוואה $x'(t) = A(t)x(t)$.
אזי פונקציה $y(t) = \pi(t)\Big(\alpha(0) + \int_0^t \pi(s)^{-1}g(s)\,\mathrm{d}s\Big)$ פותרת את המשוואה $y'(t) = A(t)x(t) + g(t)$ עם תנאי ההתחלה $y(0) = \pi(0)\alpha(0)$.

מפתח להוכחה: גוזרים את $y'(t)$ וזוכרים $\pi' = A(t)\pi(t)$ כי זה מטריצת פתרונות יסודית.

מסקנה 1.21 עקרון דוהמל

נניח שמטריצת המקדמים קבועה כלומר $A(t) = A$ ו־$x_i(0) = \mathrm{e}_i$ (הבסיס הסטנדרטי ב־0) אז $\pi(t) = e^{tA}$ ו־$\pi(0) = \mathrm{Id}$ ונקבל

$$y(t) = e^{tA}y_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}g(s)\,\mathrm{d}s$$

מפתח להוכחה: לא ראינו בהרצאה אבל זה די ברור עם הטענה הקודמת.

1.5 התנהגות לוקלית, התנהגות גלובלית ויציבות

משפט 1.22

תהיי $p \in U$ ונניח ש־$F(p) \neq 0$.
אזי קיימות קבוצות פתוחות $p \in U_0 \subseteq U_1 \subseteq U$, V פתוחה ב־$\mathbb{R}^n$ כך ש־$0 \in V \subseteq \mathbb{R}^n$ ודיפאומורפיזם גזיר ברציפות $\alpha : U_1 \to V$ ו־$\delta > 0$ כך ש־$\alpha(p) = 0$
ולכל $x \in U_0$ ו־$t \in (-\delta, \delta)$ מתקיים $\varphi_t(x) \in U_1$ ו־$\alpha(\varphi_t(x)) = \alpha(x) + (t, 0, ..., 0)$.

הוכחה:

1. בלי הגבלת הכלליות $p = 0$ ומסתכלים על הנגזרות החלקיות של $\Phi(t, x)$ בראשית
2. מכיוון ש־$F(0) \neq 0$ מרחיבים לבסיס עם וקטורי הבסיס הסטנדרטי
3. מגדירים העתקה β מסביבה של 0 ב־$\mathbb{R}^n$ ל־$\mathbb{R}^n$ על־ידי $\beta(t, x_1, ..., x_{n-1}) = \varphi_t(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, 0)$
4. משפט הפונקציה ההפוכה נקבל דיפאומורפיזם $\alpha = \beta^{-1}$ גזיר ברציפות ונקבל את התנאי הראשון ובשביל השני נחשב את $\alpha(\varphi_t(x))$ עבור

$$x = \beta(s, y_1, ..., y_{n-1}) = \varphi_s(y_1, ..., y_{n-1}, 0)$$

□

למה 1.23

תהיי $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ מטריצה עם קבוצת ערכים עצמיים $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$ ונניח ש־$\max_{\lambda\in\Lambda} Re(\lambda) < 0$.
אזי לכל $0 < \alpha < \min_{\lambda\in\Lambda}|Re(\lambda)|$ יש $C > 0$ כך שלכל $t \geq 0$ מתקיים $\|\exp(tA)\|_{op} \leq Ce^{-t\alpha}$ ובפרט $\lim_{t\to\infty} \exp(tA) = 0$.

מפתח להוכחה: לוקחים צורת ז'ורדן $J = PAP^{-1}$ ומסתכלים על המטריצה $J + \alpha I$, זאת מטריצה בצורת ז'ורדן שלכל ערכייה העצמיים חלק ממשי שלילי והם פולינומים עם מעריך שלילי ולכן קיים חסם

$$\sup_{t\geq 0} \|\exp(t(J + \alpha I))\|_{op} \leq C'$$

נשאר רק לחשב את $\|\exp(tA)\|_{op}$ ואת זה עושים עם הצורת ז'ורדן לעיל ועם החילופיות של האקספוננט שכן מטרויצת היחידה הסקלרית מתחלפת עם כל מטריצה.

הקריטריון הלינארי ליציבות אסימפטוטית

משפט 1.24 הקריטריון הלינארי ליציבות אסימפטוטית

תהיי $p \in U$ נקודת שיווי משקל של F ונניח שלכל ערך עצמי של $DF(p)$ יש חלק ממשי שלילי. אזי p יציבה אסימפטוטית.

מפתח להוכחה:

1. דיפרנציאל כאקספוננט: מכיוון ש־p היא נקודת שבת, משוואת הדיפרנציאל של הזרימה היא לינארית עם מקדמים קבועים, ופתרונה הוא האקספוננט המטריציוני $\exp(tDF(p))$
2. כיווץ בזמן מוגדר T: מכיוון שהחלק הממשי של הערכים העצמיים שלילי, הנורמה של האקספוננט דועכת לאפס. לכן קיים זמן T שבו הדיפרנציאל קטן מ־$\frac{1}{4}$
3. מסתכלים על הפיתוח

$$\varphi_T(q) = \varphi_T(p) + D\varphi_T(p)(q - p) + +o(\|q - p\|)$$

ולכן על־ידי הקטנה של δ אם צריך נוכל להניח שהמחובר $o(p - q)$ לא עולה על $\frac{1}{4}\|p - q\|_{op}$, כלומר $\|\varphi_T(q) - \varphi_T(p)\|_{op} \leq \frac{\|q-p\|_{op}}{2}$

4. מחזוריות (קפיצות kT): מפעילים את הכיווץ באופן אינדוקטיבי בכל מחזור T, ומקבלים שבזמנים kT המרחק דועך לאפס כמו 2^{-k} וזה בידיוק הגדרה של יציבות.
5. השלמה בין קפיצות: הרציפות בתנאי ההתחלה מבטיחה שבין זמני הקפיצות (בתוך הקטעים $[0, T]$) המסלול לא משתולל ובורח מהסביבה. השילוב של הדעיכה הבדידה והרציפות הביניים מבטיח יציבות ויציבות אסימפטוטית.

משפט ליאפונוב

משפט 1.25 משפט ליאפונוב

תהיי $x_0 \in U$ נקודת שיווי משקל של F. אם ל־F יש פונקציית ליאפונוב ב־x_0 אז x_0 יציבה ואם ל־F יש פונקציית ליאפונוב חזקה ב־x_0 אז x_0 יציבה אסימפטוטית.

מפתח להוכחה: <u>אם יש פונקציית ליאפונוב אז יש יציבות:</u> הפונקציה L יורדת לאורך המסלול מכלל השרשרת. מכיוון ש־x_0 היא מינימום חזק, הערך המינימלי של L על שפת כדור ε גדול מ־$L(x_0)$. לכן אפשר למצוא סביבה התחלתית קטנה יותר δ שבה המקסימום של L עדיין קטן מהמינימום שעל השפה הרחוקה. פתרון שמתחיל בסביבת ה־δ הקטנה לעולם לא יוכל לחצות את שפת ה־ε, כי זה ידרוש מהפונקציה L לעלות מתישהו, וזו סתירה למונוטוניות.

<u>אם יש ליאפונוב חזקה אז יש יציבות אסימפטוטית:</u> נניח בשלילה שהמסלול לא מתכנס ל־x_0. לכן הוא מתרחק לסירוגין ושוהה אינסוף פעמים במרחק של לפחות ε מ־x_0. מכיוון שהמהירות של המסלול חסומה (על ידי M), לוקח לו זמן לברוח ולחזור, וכל "ביקור" כזה מאלץ אותו לשהות פרק זמן מינימלי ($\frac{\varepsilon}{2M}$) בתוך טבעת מרוחקת. בטבעת הזו, הנגזרת של L (פונקציית ליאפונוב חזקה) היא שלילית ממש ורחוקה מאפס (חסומה על ידי קבוע שלילי). לכן, בכל ביקור כזה L צונחת למטה בכמות קבועה לפחות. סכימה של אינסוף צניחות כאלו גוררת ש־$L \xrightarrow[t\to\infty]{} -\infty$, וזו סתירה לכך ש־$L$ רציפה וחסומה מלמטה על קבוצה קומפקטית.
ההוכחה עצמה מאוד טכנית אז זה יותר רעיון.

משפט 1.26 הקריטריון הלינארי לאי־יציבות

תהיי $U \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה ו־$F : U \to \mathbb{R}^n$ שדה גזיר ברציפות ו־$x_o \in U$ נקודת שיווי משקל. אם ל־$DF(x_0)$ יש ערך עצמי עם חלק ממשי חיובי אז x_0 לא יציבה.

מפתח להוכחה: תחת ההנחה שאין ערכים עצמיים עם חלק ממשי אפס ומפרקים ל־$H_+ \oplus H_-$ בהתאם לסימן של הערך הממשי של ערך עצמי עם $\pi_\pm$ ההטלות המתאימות. מניחים בשלילה ש־$x_0 = 0$ יציבה ומגדירים $g(x) = F(x) - Ax$ כך שיתקיים

$$x'(t) = F(x(t)) = Ax(t) + g(x(t))$$

לכן ניתן לכתוב את הפתרון למשוואה באופן הבא (עקרון דוהמל)

$$(\star\star)\ x(t) = e^{tA}x(0) + \int_0^t e^{(t-s)A} g(x(s))\,\mathrm{d}s$$

להמשך ההוכחה אנחנו צריכים שתי למות

למה 1.27

קיים $R > 0$ כך שאם $x : [0,\infty) \to B_R(0)$ פותרת את המשוואה $x'(t) = F(x(t))$ אז

$$x(t) = e^{tA}\pi_-(x(0)) + \int_0^t e^{(t-s)A}\pi_- g(x(s))\,\mathrm{d}s - \int_t^\infty e^{(t-s)A}\pi_+ g(x(s))\,\mathrm{d}s$$

מפתח להוכחה של למה 1.27: המטרה שלנו זה להראות שאם הפתרון נשאר חסום לכל $t > 0$ (הנחת השלילה של יציבות), אפשר לכתוב אותו בצורה אינטגרלית שמפרידה בין החלק המתכווץ (π_-) לחלק המתפוצץ (π_+).

1. פירוק ועיקרון דוהמל: מפרידים את המערכת לחלק לינארי (Ax) וחלק לא לינארי שהוא ($g(x)$) $o(\|x\|)$, וכותבים את הפתרון כאינטגרל.
2. הטלה מתפוצצת: מטילים את המשוואה על המרחב המתפוצץ (π_+) ומכפילים ב־e^{-tA}.
3. חסימות וגבולות: מכיוון שהנחנו שהפתרון חסום (נמצא ב־$B_{R(0)}$), והאופרטור e^{-tA} מכווץ על תת־המרחב π_+ (כי החזקה שלילית והערכים העצמיים חיוביים), אגף שמאל שואף לאפס כש־$t \to \infty$.
4. בידוד התחלה: כתוצאה מהגבול, מקבלים ש־$\pi_+(x(0))$ חייב להיות שווה לאינטגרל מ־0 עד אינסוף, מה שמאפשר להציב אותו חזרה בנוסחת דוהמל המקורית ולקבל הצגה חדשה שמסתמכת רק על $\pi_-(x(0))$.

למה 1.28

קיים $R > R_0 > 0$ מהלמה הקודמת כך שאם $x, y : [0,\infty) \to B_{R_0}(0)$ הם פתרונות ל־$x' = F(x)$ כך ש־$\pi_-(x(0)) = \pi_-(y(0))$ אז $x(t) = y(t)$ לכל t.

מפתח להוכחה: המטרה: להראות שאם שני פתרונות נשארים חסומים ($x(t), y(t) \in B_{R_0}$) ומסכימים על החלק המתכווץ בתנאי ההתחלה שלהם ($\pi_-(x(0)) = \pi_-(y(0))$), הם בהכרח זהים לחלוטין.

1. הפרש פתרונות: מציבים את ההצגה האינטגרלית מהלמה הקודמת עבור x ו־y, ומחסרים. תנאי ההתחלה מבטלים זה את זה.
2. שליטה לא לינארית: מכיוון שהפונקציה חלקה מספיק (גזירה ברציפות), ניתן להראות שבסביבה קטנה B_{R_0}, הפער $\|g(x) - g(y)\|$ נשלט על ידי $\varepsilon\|x - y\|$.
3. חסם אינטגרלי: מפעילים נורמה ומשתמשים בחסמים המעריכיים מהלמה הקודמת (דעיכה $e^{-\mu|t|}$) על שני האינטגרלים.
4. סתירה למקסימום: חוסמים את הפער המקסימלי $d = \sup\|x(t) - y(t)\|$. מקבלים אי־שוויון מהצורה $d \le \left(2\varepsilon\frac{C}{\mu}\right)d$.

אם בוחרים את סביבת R_0 כך ש־ε יהיה מספיק קטן, מקבלים $d \le \frac{d}{2}$, מה שאפשרי רק אם $d = 0$, כלומר הפתרונות זהים.

סיום משפט אי־היציבות: אם הייתה יציבות, כל נקודה קרובה הייתה נשארת חסומה. היינו יכולים לבחור שתי נקודות שונות שמסכימות על π_- אך שונות ב־π_+. הלמה הייתה מכריחה את הפתרונות להתלכד למרות שהתחילו בנקודות שונות, וזו סתירה מוחלטת ליחידות משפט פיקארד.

1.6 משוואות דיפרנציאליות חלקיות

פונקציות הרמוניות

משפט 1.29 תכונת הערך הממוצע של פונקציות הרמוניות

תהיי $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה ותהיי $u \in C^2(\Omega)$ אזי u הרמונית ב־Ω אם ורק אם לכל $\overline{B(x_0, r_0)} \subseteq \Omega$ (כדור שהסגור שלו ב־Ω) מתקיים

$$\fint_{B(x_0,r_0)} u \,\mathrm{d}V = u(x_0) = \fint_{\partial B(x_0,r_0)} u \,\mathrm{d}S$$

מפתח להוכחה: בכיוון הראשון מניחים ש־u הרמונית.
מגדירים $\varphi(r) = \fint_{\partial B(x_0,r)} u \,\mathrm{d}S$ ואת $\psi_r : \overline{B(0,1)} \to \overline{B(x_0,r)}$ על־ידי $\psi_r(y) = x_0 + ry$ אז ψ_r הוא דיפאומורפיזם בין השפות עם יעקוביאן r^{n-1} ובגלל ש־$\mathrm{Area}(\partial B(0,1)) \cdot r^{n-1} = \mathrm{Area}(\partial B(x_0,r))$ נקבל $\varphi(r) = \fint_{\partial B(0,1)} (u \circ \psi_r) \,\mathrm{d}S$.
גוזרים את זה ובשימוש עם משפט הדבירגנץ והרמוניות מקבלים ש־$\varphi'(r) = 0$ ומרציפות היא קבועה $u(x_0)$.
נשאר להראות את השיוויון השני, אבל זה פשוט מהתוצאה הקודמת

$$\fint_{B(x_0,r_0)} u \,\mathrm{d}v = \frac{1}{\mathrm{Vol}(B(x_0,r_0))} \int_0^{r_0} \mathrm{d}r \frac{\mathrm{Area}(\partial B(x_0,r))}{\mathrm{Area}(\partial B(x_0,r))} \int_{\partial B(x_0,r)} u \,\mathrm{d}S$$

הכיוון השני נובע מהנחת השלילה ואז בלי הגבלת הכלליות $\Delta u > 0$ אבל זאת סתירה לכך ש־$\varphi'(r) = 0$.

משפט 1.30 עיקרון המקסימום לפונקציות הרמוניות

נניח ש־$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה וחסומה ונניח ש־$u \in C^2(\Omega) \cap C\left(\overline{\Omega}\right)$ הרמונית.

1. העיקרון החלש – המקסימום מתקבל על השפה, כלומר $\max u\left(\overline{\Omega}\right) = \max u(\partial\Omega)$
2. העיקרון החזק – אם Ω קשירה וקיים $x_0 \in \Omega$ כך ש־$u(x_0) = \max u\left(\overline{\Omega}\right)$ אז u קבועה

מפתח להוכחה:

1. מערך הממוצע של פונקציות הרמוניות כי אחרת יש סביבה שבה כל הערכים קטנים ממש מהמקסימום ואז בפרט הממוצע בסביבה הזאת לא יכול להיות המקסימום, סתירה
2. מגדירים $A := \{y \in \Omega \mid u(x_0) = u(y)\}$ ומסבירים למה ממשפט הערך הממוצע של פונקציות הרמוניות היא גם פתוחה, גם סגורה, גם לא ריקה ומקשירות מסיימים.

מסקנה 1.31

אם $u, v \in C^2(\Omega) \cap C\left(\overline{U}\right)$ כאשר Ω פתוחה וחסומה ומתקיים ש־$u|_{\partial\Omega} = v|_{\partial\Omega}$ ו־$\Delta u = \Delta v$. אז $u = v$.

משפט 1.32

תהיי $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה ונניח ש־$u \in C(\Omega)$ מקיימת את תכונת הערך הממוצע ב־Ω. אזי $u \in C^\infty(\Omega)$ (חלקה) ובפרט הרמונית.

מפתח להוכחה: זוכרים בלב את ההגדרה המאוד ארוכה הבאה: נקבע פונקציה חלקה ואי־שלילית $\eta : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ המקיימת $\eta|_{[0,\frac{1}{2})} = 1$ ועבור $x \geq 1$ ניקח $\eta(x) = 0$.
בהינתן $\varepsilon > 0$ נגדיר $\varphi_\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ על־ידי

$$\varphi_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^n} \frac{\eta\left(\frac{\|x\|}{\varepsilon}\right)}{\int_{\mathbb{R}^n} \eta(\|y\|) \,\mathrm{d}y}$$

φ_ε חלקה, רדיאלית הנתמכת על $B(0,\varepsilon)$ ומקיימת $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(y) \,\mathrm{d}y = 1$.

הגדרה 1.33 שיכוך

יהי $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום ולכל $\varepsilon > 0$ נסמן $\Omega_\varepsilon := \{x \in \Omega \mid \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$.
עבור $u \in C(\Omega)$ ו־$\varepsilon > 0$ נגדיר את השיכוך של u בסקאלה ε להיות הפונקציה $u^\varepsilon : \Omega_\varepsilon \to \mathbb{R}$ שנתונה על־ידי

$$u^\varepsilon = \varphi_\varepsilon * u = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x-y) u(y) \,\mathrm{d}y$$

בפרט u^ε חלקה (הוכחנו בתרגיל 10).

מספיק להראות שלכל $\varepsilon > 0$ מתקיים $u|_{\Omega_\varepsilon} = u^\varepsilon$ מחשבים את $\varphi^\varepsilon(x)$ לפי פתיחת סוגריים של קונבולוציה $\longleftarrow$ משתמשים בתכונת ערך הממוצע שנתונה $\longleftarrow$ אורזים בחזרה אחורה $\longleftarrow$ זוכרים ש־φ^ε מנורמלת כאינטגרל על כל המרחב וסיימנו.

מסקנה 1.34

פונקציות הרמוניות הן חלקות.

מסקנה 1.35

גבול במידה שווה של פונקציות הרמוניות הוא הרמוני (ב־$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה).

משפט 1.36 **הערכת נגזרות לפונקציות הרמוניות**

לכל $n, k \in \mathbb{N}$ יש קבוע $0 < C(n,k)$ כך שלכל קבוצה פתוחה $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ולכל $u : \Omega \to \mathbb{R}$ הרמונית ולכל מולטי־אינדקס $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ (אינדקס וקטורי) עם $|\alpha| = \sum \alpha_i = k$ ולכל $\overline{B(x,r)} \subseteq \Omega$ מתקיים

$$|D^\alpha u(x)| = \left| \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} u(x) \right| \leq \int_{B(x,r)} |D^\alpha \varphi_r(x-y)||u(y)| \, \mathrm{d}y \leq \frac{C(n,k)}{r^{n+k}} \int_{B(x,r)} |u(y)| \, \mathrm{d}y$$

מפתח להוכחה: מתקיים $u|_{\Omega_r} = u^r$ ולכן $D^\alpha u(x) = D^\alpha \varphi_r * u$ כאשר

$$\varphi_r(x-y) = \frac{1}{r^n \int_{\mathbb{R}^n} \eta(\|z\|) \, \mathrm{d}z} \eta\left(\frac{\|x-y\|}{r}\right)$$

על־כל גזירה יוצאת חזקה של r החוצה ואת שאר הגורמים ניתן לחסום יוניפורמית מכך ש־η נתמכת קומפקטית וחלקה ואז (וגם את הנגזרות שלה מסדר גדול שווה ל־k וגם לחסום צירופים לינאריים ומכפלות שלהם) ולכן יש $C(n,k)$ גדול מספיק החוסם כנדרש.

משפט 1.37 **אי־שיוויון הרנאק**

יהי $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה ותהיי $V \subseteq \Omega$ פתוחה, קשירה וחסומה כך ש־$\overline{V} \subseteq \Omega$. אזי יש קבוע $0 < C(\Omega, V)$ כך שלכל $u : \Omega \to \mathbb{R}$ הרמונית ואי־שלילית מתקיים

$$\sup u(V) \leq C(\Omega, V) \cdot \inf u(V)$$

מפתח להוכחה: מוכיחים למקרה פרטי – נניח ש־$V = B(x,r)$ ונניח גם ש־$\overline{B(x_0, 4r)} \subseteq \Omega$ ונקבע $x_0, x_1 \in V$ מאי־שיוויון המשולש $B(x_1, r) \subseteq B(x_0, 3r)$ ו־$\overline{B(x_0, 3r)} \subseteq \Omega$ ולכן מערך הממוצע ומאי־שליליות של u חוסמים

$$u(x_0) = \frac{1}{\mathrm{Vol}(B(x_0, 3r))} \int_{B(x_0, 3r)} u(y) \, \mathrm{d}y \geq \cdots \geq 3^{-n} u(x_1)$$

למקרה הכללי, מקומפקטיות יש אוסף סופי של נקודות $p_1, ..., p_M \in \overline{V}$ ורדיוסים $r_1, ..., r_M > 0$ כך ש־$\overline{V} \subseteq \bigcup_{i=1}^M B(p_i, r_i) \subseteq \Omega$ ו־$\overline{B(p_i, 4r_i)}$ לכל i.
מקבעים שתי נקודות ומקשירות יש מסילה שמחברת ביניהן ומכוסה על־ידי M כדורים שיחד עם המקרה הפרטי כשמניחים שלא עוברים בין אותו כדור פעמיים צוברים את הפקטור של המקרה הפרטי וזה מסיים.

פונקציות תת־הרמוניות

הכי חשוב לזכור את ההגדרה

הגדרה 1.38 **פונקציה תת־הרמונית**

תהיי $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום (קבוצה פתוחה וקשירה). $v \in C(\Omega)$ תקרא תת־הרמונית ב־Ω אם לכל $B \subseteq \Omega$ כדור פתוח כך ש־$\overline{B} \subseteq \Omega$ ולכל $h \in C\left(\overline{B}\right)$ הרמונית ב־B המקיימת $v|_{\partial B} \leq h|_{\partial B}$ מתקיים $v \leq h$ ב־B.

משפט 1.39 **עיקרון המקסימום החזק עם פונקציות תת־הרמוניות**

יהי $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום ותהיי $u \in C(\Omega)$ תת־הרמונית ב־Ω. אם u מקבלת מקסימום ב־Ω אז u קבועה ב־Ω.

מפתח להוכחה: נסמן

$$M := \max_{x \in \Omega} u(x), \quad A := \{x \in \Omega \mid u(x) = M\}$$

מאחר ש־u רציפה נובע ש־A סגורה ב־Ω ולא ריקה ויהיו $x_0 \in A$, $B = B(x_0, r)$ כדור כך ש־$\overline{B} \subseteq \Omega$.
ישירות מהגדרת פונקציות הרמוניות ופונקציות תת־הרמוניות עם עיקרון המקסימום לפונקציות הרמוניות מראים ש־$h \equiv M$ ולכן זה נכון גם על שפת הכדור ולכן הכדור הפתוח B מוכל ב־A שפתוחה, סגורה, לא ריקה ומקשירות סיימנו.

משפט 1.40 **עקרון המקסימום החלש לפונקציות תת־הרמוניות**

יהי $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום חסום ותהיינה $u \in C\left(\overline{\Omega}\right)$ תת־הרמונית, $h \in C\left(\overline{\Omega}\right)$ הרמונית ב־Ω. אם $u \leq h$ על $\partial\Omega$ אז $u \leq h$ ב־Ω.

מפתח להוכחה: נביט ב־$w = u - h$ והיא תת־הרמונית, לוקחים $x_0 \in \overline{\Omega}$ שהוא המקסימלי ו־$w \leq 0$ עליו ולכן נחלק למקרים עבור $x_0 \in \Omega$ ו־$x_0 \in \partial\Omega$ וזה די ישיר מכאן.

טענה 1.41

אם $u_1, u_2, ..., u_N$ תת־הרמוניות ב־Ω אז $u = \max\{u_1, u_2, ..., u_N\}$ היא תת־הרמונית ב־Ω.

הגדרה 1.42 u^{per}

$$u^{per}(x) = \sup\left\{v(x) \mid v|_{\partial\Omega} \le g, v \in C\left(\overline{\Omega}\right) \text{ sub-harmonic}\right\}$$

הגדרה 1.43 ההרמה ההרמונית

תהיי v תת־הרמונית ב־Ω ו־$\overline{B} \subseteq \Omega$. נגדיר את ההרמה ההרמונית של v לכדור B ב־V כך ש־$V \in C(\Omega)$ המוגדרת על־ידי

$$V(x) = \begin{cases} v(x) & x \notin B \\ \overline{v}(x) & x \in B \end{cases}$$

כאשר $\overline{v} \in C\left(\overline{B}\right)$, $\overline{v}|_{\partial B} = v|_{\partial B}$ ו־$\overline{v}$ הרמונית ב־B.

טענה 1.44

V היא תת־הרמונית ב־Ω.

מפתח להוכחה:

1. לוקחים כדור שרירותי C ופונקציה הרמונית h שחוסמת את V ממעל על השפה ∂C. נדרש להראות ש־$V \le h$ בתוך C.
2. שליטה מחוץ לכדור הפנימי: מכיוון ש־$V \ge v$ והנחנו $V \le h$ על ∂C, נובע ש־$v \le h$ על ∂C. כיוון ש־v תת־הרמונית, עיקרון המקסימום גורר ש־$v \le h$ בכל C. מכיוון שמחוץ לכדור B מתקיים $V = v$, קיבלנו ש־$V \le h$ בקבוצה $C \setminus B$.
3. שליטה בתוך הכדור הפנימי: נותר לבדוק את החיתוך $U = B \cap C$. השפה שלו מורכבת מחלקים שנמצאים על ∂B או על ∂C, ובשניהם הראינו כבר ש־$V \le h$.
4. מסיימים עם עיקרון המקסימום

משפט 1.45

תהיי u_n סדרה חסומה של פונקציות הרמוניות ב־Ω. אזי קיימת תת־סדרה u_{n_k} המתכנסת לפונקציה הרמונית ב־Ω (ההתכנסות היא במידה שווה על כל תת־קבוצה קומפקטית של Ω).

מפתח להוכחה: גם הנגזרות של פונקציה הרמונית הן פונקציה הרמונית עם אינטגרציה בחלקים עם הפונקציה הקבועה 1 על

$$\partial_i u(x_0) = \frac{1}{|B(x_0, r)|} \int_{B(x_0,r)} (\partial_i u)(x)\,\mathrm{d}x$$

וחסם על היחס בין נפח לשטח מביא לנו חסם של $\frac{\max_{\overline{\Omega}} u}{r}$ עבור $r < \operatorname{dist}(K, \partial\Omega)$ קטן דיו ואז אפשר לחסום על קבוצה קומפקטית K

$$|u_n(x) - u_n(y)| \le \max_K |\nabla u_n| \cdot |x - y| \le \frac{\max_{\overline{\Omega}} |u|}{r} |x - y|$$

ומטיעון אלכסון עם ארצלה־אקסולי על $K_1 \subseteq K_2 \subseteq \cdots$ כך ש־$\bigcup_m K_m = \Omega$ נסיים.

משפט 1.46 משפט Perron

נגדיר

$$S_g := \left\{v \in C\left(\overline{\Omega} \mid v \text{ sub-harmonic}, v|_{\partial\Omega} \le g\right)\right\}, \quad u^{per} := \sup\left\{v \mid v \in S_g\right\}$$

אז u^{per} הרמונית ב־Ω (כלומר מועמד רציני לפיתרון).

מפתח להוכחה:

1. בוחרים נקודה y ומוצאים סדרה של פונקציות תת־הרמוניות v_n שמתכנסת ל־$u^{per}(y)$. קוטמים אותן מלמטה (כדי להבטיח חסימות) מבלי להרוס את התכונה התת־הרמונית.
2. מרימים: מפעילים על הסדרה הרמה הרמונית בתוך כדור B סביב y. מתקבלת סדרת פונקציות V_n שגדולות יותר מהמקוריות אבל קטנות מ־u^{per}, והן הרמוניות ב־B.
3. התכנסות לגבול הרמוני h_v: לפי משפט שראינו, יש תת־סדרה שמתכנסת במידה שווה לפונקציה הרמונית h_v. ברור ש־$h_v(y) = u^{per}(y)$ וש־$h_v \le u^{per}$ בכל מקום.
4. נניח בשלילה שקיימת נקודה z בכדור שבה $h_v(z) < u^{per}(z)$. בונים סדרה חדשה w_n שממקסמת את הערך ב־z, דורשים שהיא תהיה גדולה מ־V_n, ומרימים גם אותה להרמונית W_n.
5. סיום עם עיקרון המקסימום: הגבול החדש h_w חייב להיות הרמוני, והוא מסכים עם h_v בנקודה y, אבל גדול ממנו בנקודה z. זה אומר שההפרש $h_v - h_w$ הוא פונקציה הרמונית שלילית שמקבלת מקסימום (0) בנקודה הפנימית y, וזו סתירה לעיקרון המקסימום החזק. לכן h_v שווה זהותית ל־u^{per} והיא בהכרח הרמונית.

2 דברים חשובים מתרגילים

2.1 תרגיל 1

שיטת גורם האינטגרציה

משפט 2.1

יהי $J \in \mathbb{R}$ מקטע ונקבע $t_0 \in J$. נניח כי $a, f : J \to \mathbb{R}$ רציפות ונוכיח כי $x : J \to \mathbb{R}$ פותרת את המשוואה

$$x'(t) = a(t)x(t) + f(t)$$

אם ורק אם קיים $c \in \mathbb{R}$ כך שמתקיים

$$x(t) = e^{\varphi(t)} \left(\int_{t_0}^{t} e^{-\varphi(s)} f(s) \, \mathrm{d}s + c \right)$$

כאשר

$$\varphi(t) = \int_{t_0}^{t} a(s) \, \mathrm{d}s$$

הוכחה:
$\Longleftarrow$ מגדירים $y(t) = e^{-\varphi(t)} x(t)$ וגוזרים ואז מתכונות נגזרת אקספוננט נובע שקיים $c \in \mathbb{R}$ כך שמתקיים

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} e^{-\varphi(s)} f(s) \, \mathrm{d}s + c$$

$\Longrightarrow$ x גזירה ברציפות ולכן מכלל שרשרת מסיימים. □

2.2 תרגיל 2

הלמה של גרונוול

למה 2.2 הלמה של גרונוול

יהי $\delta > 0$ ותהיינה $a, u : [0, \delta] \to \mathbb{R}$ כך שך־a רציפה ו־u גזירה ברציפות. נניח כי לכל $t \in (0, \delta)$ מתקיים

$$u'(t) \leq a(t)u(t)$$

1. מתקיים ש־$v(t) = e^{\int_0^t a(s) \, \mathrm{d}s}$ היא פיתרון לבעיה

$$\begin{cases} v'(t) = a(t)v(t) \\ v(0) = 1 \end{cases}$$

2. לכל $t \in [0, \delta)$ מתקיים

$$u(t) \leq u(0)v(t)$$

הוכחה:
1. נסמן $g(t) = \int_0^t a(s) \, \mathrm{d}s$ וגוזרים לפי כלל שרשרת, מציבים 0 וסיימנו
2. נסתכל על $w(t) = \frac{u(t)}{v(t)}$, גוזרים ועם הסעיף הקודם רואים שהיא מונוטונית יורדת, מציבים 0 ומסיימים

□

2.3 תרגיל 3

משפט פיקארד עבור משוואות ליניאריות עם מקדמים קבועים

משפט 2.3

יהי $I \subseteq \mathbb{R}$ קטע שמכיל את 0, $A : I \to \mathbb{R}^{n \times n}, g : I \to \mathbb{R}^n$ פונקציות רציפות.
אזי לכל $x_0 \in \mathbb{R}^n$ קיים פתרון יחיד אשר מוגדר על כל I לבעיית ההתחלה

$$(\star) \begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) + g(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

הוכחה: ראה משפט 1.12. □

3 דברים טכניים

3.1 שימוש בשיטת גורם האינטגרציה

ראה משפט 2.1.

דוגמה

נמצא את הפיתרון למשוואה $x'(t) = \frac{t}{t+1}x(t) + 1$ עם תנאי ההתחלה $x(0) = 1$ בתחום $(-1, \infty)$.

הוכחה: בשביל להשתמש במשפט 2.1 נגדיר

$$a(t) = \frac{t}{t+1}$$
$$f(t) = 1$$

אלו פונקציות רציפות ב־$(-1, \infty)$ ועבור $t_0 = 0$ מתקיים

$$\varphi(t) = \int_0^t a(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^t \frac{s}{s+1}\,\mathrm{d}s = t - \ln(t+1)$$

שהאחרונה מוגדרת היטב בתחום שלנו ולכן הפיתרון הוא מהצורה

$$x(t) = e^{\varphi(t)}\left(\int_{t_0}^t e^{-\varphi(s)} f(s)\,\mathrm{d}s + c\right) = \frac{e^t}{t+1}\left(\int_0^t \frac{s+1}{e^s}\,\mathrm{d}s + c\right) = \frac{e^t}{t+1}\left(-\frac{t+2}{e^t} + 2 + c\right)$$

תנאי ההתחלה הוא $x(0) = 1$ ונקבל

$$\frac{e^0}{0+1}\left(-\frac{0+2}{e^0} + 2 + c\right) = 1 \iff -2 + 2 + c = 1 \iff c = 1$$

כלומר

$$x(t) = \frac{e^t}{t+1}\left(-\frac{t+2}{e^t} - 1\right)$$

□

3.2 שיטת הפרדת משתנים

משפט 3.1 שיטת הפרדת משתנים

תהיי $U \subseteq \mathbb{R}$ פתוחה, $I \subseteq \mathbb{R}$ קטע, $t_0 \in I$ זמן התחלה, $f : U \to \mathbb{R}$ ו־$g : I \to \mathbb{R}$ רציפות. נניח גם ש־f לא מתאפסת ב־U.
אז $x : I \to U$ היא פיתרון של המשוואה הדיפרנציאלית הרגילה $x'(t) = f(x(t))g(t)$ אם ורק אם היא מהצורה

$$x(t) = \varphi^{-1}\left(\int_{t_0}^{t} g(s)\,\mathrm{d}s + C\right)$$

כאשר φ פונקציה קדומה ל־$\frac{1}{f}$ ב־U ו־C קבוע כלשהו.

הוכחה: המשוואה השקולה היא

$$\frac{x'(t)}{f(x(t))} = g(t)$$

ומכלל השרשרת זה שקול למשוואה

$$\varphi(x(t))' = g(t)$$

מהמשפט היסודי זה שקול לכך שיש קבוע C כך שמתקיים

$$\varphi(x(t)) = \int_{t_0}^{t} g(s)\,\mathrm{d}s + C$$

כעת $\varphi' = \frac{1}{f}$ פונקציה רציפה שלא מתאפסת ב־U ולכן ממשפט הפונקציה ההופכית φ הפיכה ב־U וזה שקול למשוואה

$$x(t) = \varphi^{-1}\left(\int_{t_0}^{t} g(s)\,\mathrm{d}s + C\right)$$

□

דוגמה מתרגול 2

נמצא את הפיתרון הכללי למשוואה

$$x'(t) = t(1 + x^2(t))$$

זוהי משוואה ניתנת להפרדה ולכן נגדיר

$$f(x) = 1 + x^2, \quad g(t) = t$$

ואז

$$\varphi(x) = \arctan(x)$$

כלומר

$$x(t) = \varphi^{-1}\left(\int g(t)\,\mathrm{d}t + C\right) = \tan\left(\frac{t^2}{2} + C\right)$$

3.3 שימוש בוריאציה של קבועים

דוגמה

נתונה המערכת הלינארית

$$x'(t) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} x(t) + v$$

היכן ש־$v \in \mathbb{R}^2$ וקטור קבוע.
באמצעות וריאציה של קבועים נכתוב נוסחה סגורה לפיתרון המשוואה עם תנאי ההתחלה $x_0 \in \mathbb{R}^2$ ולהוכיח שהנוסחה אכן מתארת את הפיתרון.

פתרון: אנחנו מתחילים מלחשב את הפולינום האופייני של A

$$\det(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} -2-\lambda & 1 \\ 1 & -2-\lambda \end{pmatrix} = (-2-\lambda)^2 - 1 = (\lambda+3)(\lambda+1)$$

ולכן הערכים העצמיים הם $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -3$ ובהתאם נחשב

$$\begin{pmatrix} -2+1 & 1 \\ 1 & -2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} -2+3 & 1 \\ 1 & -3+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ולכן המטריצה המלכסנת P והמטריצה האלכסונית D הן

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

ועובדה חשובה שחוזרת על עצמה היא דרך חישוב של מטריצה הופכית למטריצה מסדר 2×2 על־ידי הנוסחה $P^{-1} = \frac{1}{\det(P)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.
נקבל

$$e^{tA} = Pe^{tD}P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{-t}+e^{-3t} & e^{-t}-e^{-3t} \\ e^{-t}-e^{-3t} & e^{-t}+e^{-3t} \end{pmatrix}$$

לפי עיקרון דוהמל עבור $x(0) = x_0$ נקבל מטריצת הפתרונות היסודית ניתנת על־ידי $\pi(t) = e^{At}$ ומתקיים

$$x(t) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} g(s)\,\mathrm{d}s$$

במקרה שלנו $g(s) = v$ וקטור קבוע ולכן ניתן לחשב את האינטגרל מימין

$$\int_0^t e^{(t-s)A} v\,\mathrm{d}s = \left(\int_0^t e^{(t-s)A}\,\mathrm{d}s\right)v = \left(\int_0^t e^{uA}\,\mathrm{d}u\right)v = A^{-1}\big(e^{tA} - \mathrm{Id}\big)v$$

שכן $\det(A) \neq 0$ ולכן A הפיכה וכמקודם

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

ולכן המועמדת לנוסחה סגורה היא

$$x(t) = e^{tA}x_0 + A^{-1}\big(e^{tA} - \mathrm{Id}\big)v$$

כדי להראות שהיא אכן סגורה, נשים לב ש־$x(0) = x_0$ ולכן רק נשאר להראות האם $x'(t) = Ax(t) + v$ ואכן

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x(t)) = Ae^{tA}x_0 + A^{-1}Ae^{tA}v = A\big(e^{tA}x_0 + e^{tA}v\big)$$

וכן

$$A\big(e^{tA}x_0 + A^{-1}e^{tA}v - A^{-1}v\big) + v = Ae^{tA}x_0 + e^{tA}v - v + v = Ae^{tA}x_0 + e^{tA}v$$

כלומר קיבלנו שהנוסחה סגורה. □

3.4 איטרציות פיקארד

הגדרה 3.2 איטרציות פיקארד

משפט העתקה מכווצת מספק לנו גם אלגוריתם קונסטרוקטיבי למציאת הפתרון.
אם נתחיל מניחוש התחלתי כלשהו, למשל הפונקציה הקבועה $y_0(t) = x_0$, ונפעיל את האופרטור K באופן איטרטיבי:

$$y_n(t) = Ky_{n-1}(t) = x_0 + \int_0^t F(y_{n-1}(s))\,\mathrm{d}s$$

מובטח לנו שסדרת הפונקציות $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ (אשר נקראת "איטרציות פיקארד") תתכנס במידה שווה לפתרון היחיד של המשוואה.

דוגמה תרגול 2

נתבונן בבעיית ההתחלה $\begin{cases} x'=2(x+1) \\ x(0)=0 \end{cases}$, נסמן $y_0(t) = 0$ ונגדיר את האופרטור

$$Kx = 2\int_0^t (x(s)+1)\,\mathrm{d}s$$
$$y_n(t) = Ky_{n-1}(t)$$

ולכן

$$y_1 = Ky_0(t) = 2\int_0^t 1\,\mathrm{d}s = 2t$$
$$y_2(t) = Ky_1(t) = 2\int_0^t 2s+1\,\mathrm{d}s = 2t^2+2t = \frac{(2t)^2}{2}+2t$$
$$\vdots$$
$$y_n(t) = K^n y_0(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(2t)^i}{i!}$$

הפונקציה הגבולית היא

$$\lim_{n\to\infty} y_n(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(2t)^i}{i!} = e^{2t}-1$$

והיא אכן פיתרון למשוואה.

דוגמה תרגיל בית 2

נתבונן בבעיית ההתחלה $\begin{cases} x'=x \\ x(0)=1 \end{cases}$ נגדיר $y_0(t) = 1$ ונגדיר את האופרטור על פונקציות רציפות

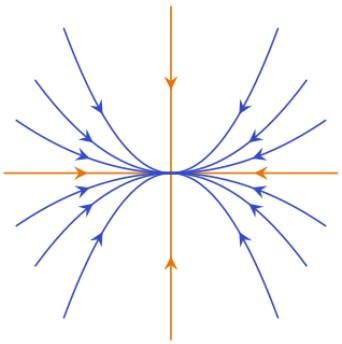
$$Kx(t) = 1 + \int_0^t x(s)\,\mathrm{d}s$$

ונפעיל איטרציות של האופרטור על y_0

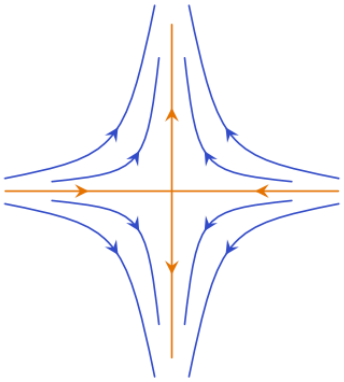
$$y_1 = Ky_0(t) = 1 + \int_0^t 1\,\mathrm{d}s = 1+t$$
$$y_2(t) = Ky_1(t) = 1 + \int_0^t 1+s\,\mathrm{d}s = 1 + \int_0^t 1\,\mathrm{d}s + \int_0^t s\,\mathrm{d}s = 1+t+\frac{t^2}{2}$$
$$\vdots$$
$$y_n(t) = K^n y_0(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^t$$

והאיטרציות פיקארד האלו בעצם מביאות את טור טיילור של אקספוננט ואכן e^t הוא פיתרון למשוואה כי $(e^x)' = e^x$ ו־$e^0 = 1$.

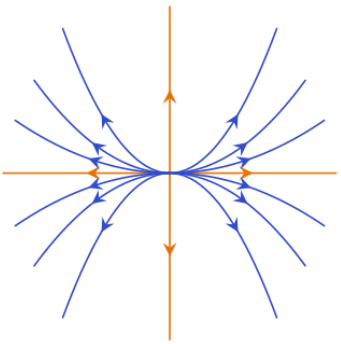
3.5 דיאגרמות זרימה



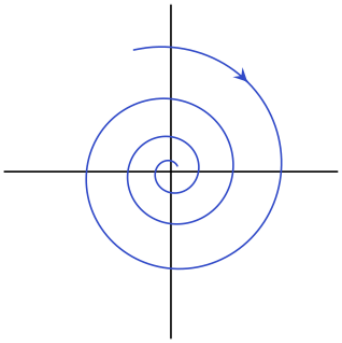
$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$



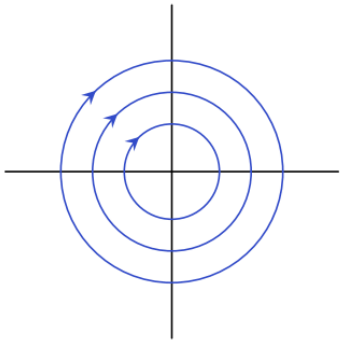
$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$



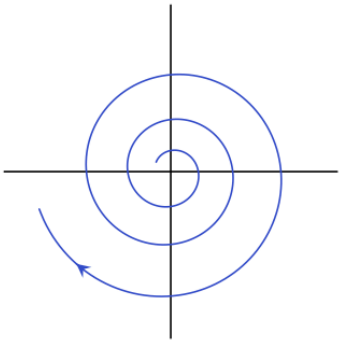
$0 < \lambda_1 < \lambda_2$



$\mathrm{Re}(\lambda), \mathrm{Re}(\overline{\lambda}) < 0$



$\mathrm{Re}(\lambda), \mathrm{Re}(\overline{\lambda}) = 0$



$\mathrm{Re}(\lambda), \mathrm{Re}(\overline{\lambda}) > 0$